

## 7. Übungsserie

### 1. (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Matrix C den Rang 2 hat:

$$A \leftarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dem Skript kann man entnehmen, dass der Rang der Matrix durch die Determinante der Matrix ermittelt werden kann. Wir entwickeln daher die Determinante nach der 1. Spalte.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 1 * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

Damit ist bewiesen, dass die Matrix den Rang 2 hat.

### 2. (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix  $A \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A durch Entwicklung nach der dritten Spalte.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 * \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 3 * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -5 + 3 + 1 = -1$$

(b) Welchen Rang hat A?

Für die Berechnung des Ranges nutzen wir R. Wir nutzen dafür das R-Skript zum Rang von Matrizen.

> # Die Matrix A wird definiert.

> A <- c(1, 1, 1, 3, 4, -1, 1, 1, 0)

> (A <- matrix(A, ncol = 3))

[,1] [,2] [,3]

[1,] 1 3 1

[2,] 1 4 1

[3,] 1 -1 0

> #Zur Berechnung des Ranges nutzen wir die Formel 'qr(A)\$rank'. Das A steht dabei für die Matrix

> qr(A)\$rank

[1] 3

Die Matrix hat also den Rang 3.

### 3. (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Man verifiziere, dass

(a) B die Eigenwerte  $\lambda = 16$ ,  $\lambda = 6$  und  $\lambda = -4$  besitzt,

$$X_B * \lambda = \det(\lambda * E - B) =$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 0 & -4 \\ 0 & \lambda - 16 & 0 \\ -4 & 0 & \lambda + 2 \end{pmatrix} =$$

$$0 * \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & \lambda - 2 \end{pmatrix} + (\lambda - 16) * \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -4 \\ -4 & \lambda + 2 \end{pmatrix} - 0 * \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$(\lambda - 16) * [(\lambda - 4) * (\lambda + 2) - (-4 * -4)] =$$

Gruppenmitglieder: Kirsten Schlebbe, Peter Steemann

$$(\lambda - 16) * [(\lambda^2 + 2\lambda - 4\lambda - 8) - 16] =$$

$$(\lambda - 16) * (\lambda^2 - 2\lambda - 24) =$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 24\lambda - 16\lambda^2 + 32\lambda + 384 =$$

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 8\lambda + 384$$

In diese Gleichung setzen wir nun die gegebenen  $\lambda$ -Werte ein.

$$16^3 - 18 * 16^2 + 8 * 16 + 384 = 0$$

$$6^3 - 18 * 6^2 + 8 * 6 + 384 = 0$$

$$(-4)^3 - 18 * (-4)^2 + 8 * (-4) + 384 = 0$$

Damit ist bewiesen, dass die Matrix B die Eigenwerte  $\lambda_1 = 16$ ,  $\lambda_2 = 6$  und  $\lambda_3 = -4$  hat.

**(b) die zugehörigen Eigenvektoren jeweils Vielfache von  $\vec{x}_1 = (0; 1; 0)^T$ ;  $\vec{x}_2 = (2; 0; 1)^T$  und  $\vec{x}_3 = (1; 0; -2)^T$  sind und**

$$A \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Wir setzen nun die  $x$ -Vektoren mit ihrem jeweiligen  $\lambda$  in die genannte Gleichung ein:

$$A \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 16 * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -4 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Damit sind die Eigenvektoren Vielfaches der  $x$ -Vektoren

**(c) die Matrix, deren Spaltenvektoren die auf die Länge 1 normierten Eigenvektoren bilden, orthogonal ist.**

Wir normieren die Eigenvektoren auf 1. Dafür verwenden wir folgende Regel:  $\vec{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$

$$\vec{x}_1 = (0, 1, 0) = \sqrt{1^2} = 1 \rightarrow \text{Der Vektor hat bereits die Länge 1}$$

$$\vec{x}_2 = (2, 0, 1) = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5} \rightarrow \text{Wir setzen dies in die genannte Formel ein:}$$

Gruppenmitglieder: Kirsten Schlebbe, Peter Steemann

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$\vec{x}_3 = (1, 0, -2) = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \rightarrow$  Wir setzen dies in die genannte Formel ein:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Wenn eine Matrix orthogonal sein muss, muss folgendes gelten:  $A \cdot A^T = E$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & \frac{0}{\sqrt{5}} & \frac{0}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & \frac{0}{\sqrt{5}} & \frac{0}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch den entstandenen Einheitsvektor ist bewiesen, dass die Matrix orthogonal ist.